Konstruktywne metody znajdowania równowag w dużych gospodarkach.

Łukasz Balbus[1]

Wojewódzki Urząd Pracy w Zielonej Górze,
28 Maja 2014

[1] **Uniwersytet Zielonogórski.**

Cele teorii gier w ekonomii:

- próba zrozumenia zachowań ludzkich gdy zachodzi konflikt interesów,
- próba zrozumienia zjawisk mikro i makroekonomicznych,

poprzez stworzenie modeli matematycznych, które wyjaśniałyby zachowania ludzi i zjawisk.

Modele matematyczne w teorii gier:

(i) Każdemu graczowi definiuje się funkcję wypłaty i każdy gracz i zakłada się, że gracz stara się maksymalizować swoją wypłatę,

(ii) Zakładamy, że każdy gracz wybiera optymalną strategię, która jest dla niego opłacalna w sytuacji, jaka powstała w wyniku działania pozostałych graczy. (Równowaga Nasha)

Przykład: **Duopol Cournota:** Mamy 2 firmy produkujących to samo dobro. Gdy x -procentowy poziom produkcji firmy X, y - procentowy poziom produkcji firmy Y wtedy zysk firmy X to

$$\Pi_X(x, y) = P(x + y)x - c(x),$$

a firmy Y to

$$\Pi_Y(x, y) = P(x + y)y - c(y),$$

gdzie np. $P(x, y) = 100 - x - y$, a koszt produkcji to $c(x) = 10x$.

Sytuacja firmy X.

- Gdy Y wybierze poziom y wtedy zysk firmy x

$$\Pi_X(x) = (90 - y - x)x,$$

czyli firma X osiągnie maksymalny zysk gdy wybierze **najlepszą odpowiedź**:

$$BR(y) = \frac{90 - y}{2},$$

Podobnie rozumuje firma Y.

Równowaga Nasha to $x^* = 30\%$, $y^* = 30\%$.

Nie oznacza to że to najlepszy układ dla obu firm.

- Gdy obie firmy zastosują poziom 30% wtedy zarabiają 900.
- Gdyby obie firmy umówiły się że zmniejszą produkcję do 27.5% wtedy obie zyskują $962, 5$.
- Jednak $(x^*, y^*) = (27.5, 27.5)$ nie jest równowagą Nasha, bo gdy X wybierze 27.5% wtedy Y może wycofać się z umowy i ustalić poziom na $36.25\% = \frac{90-27.5}{2}$ i uzyskać wynik 1314.0625. Oszukana firma X uzyska wtedy 721.875.
- Gdyby jednak firma X byłaby równie nieuczciwa (wierząc w uczciwość firmy Y) i wybrała również 36.25% wtedy zysk dla obu firm wyniesie 620.5

	Strategia X	Strategia Y	Zysk X	Zysk Y
Brak współpracy	30%	30%	900	900
Współpraca	27.5%	27.5%	962.5	962.5
Y oszukuje X	27.5	36.25	721.88	1314.06
wzajemne oszustwo	36.25	36.25	634.38	634.38

Do czego dojdziemy gdy będziemy się oszukiwać?

- Firmy umówiły się że wybiorą poziom 27.5%,
- Gdy firma Y wierzy firmie X, wybierze najlepszą odpowiedź na 27.5% poziom 36.25%,
- Gdy firma X nie wierzy do końca w uczciwość firmy Y i wybierze najlepszą odpowiedź na poziom 36.25, wtedy będzie to $26.875\% = \frac{90-36.25}{2}$,
- Gdy firma Y wie, że X niedowierza Y ta wybierze $31.5625\% = \frac{90-26.875}{2}$,
- Gdy firma X wie o poprzednich punktach wybierze $29.21875 = \frac{90-31.5625}{2}$,
- ... $30.390625 = \frac{90-29.21875}{2}$,
- ... $29.8046875 = \frac{90-30.390625}{2}$,
- czyli stosując iteracje **funkcji najlepszej odpowiedzi** *BR* obie firmy są coraz bliżej równowagi Nasha.

Problemy:

- Nie zawsze równowaga Nasha istnieje,
- Nie zawsze równowaga jest jedyna,
- Nie zawsze iteracje funkcji $BR(\cdot)$ mają granice,
- Czasami iteracje BR są zbieżne mimo iż równowaga nie istnieje,

Publikacje o zbieżności iteracji:

- Milgrom Roberts (1990), gry statyczne
- Nowak,P.Szajowski (2003), Balbus, Nowak (2004), Balbus, Reffett, Woźny (2012,2013,2014), gry dynamiczne
- Balbus, Dziewulski, Reffett i Woźny (2014), Yang, Qi (2014), gra statyczna z continum graczy,
- Celem projektu jest znalezienie założeń, aby iteracje BR zbiegały do równowagi Nasha **w dużych grach**, a więc w grach z continum graczy.

Cechy dużych gier:

(i) Pojedynczy gracz nie ma wpływu na stan gry (np. sytuację na rynku pracy),

(ii) Wpływ na stan gry może mieć dopiero istotna frakcja uczestników. W tym celu
   - na ludzi są prowadzone naciski, aby jednak poszli do wyborów,
   - na fabryki emitujące nadmiar zanieczyszczeń wprowadza się kary,
   - wprowadza się akcyzę na paliwa płynne, papierosy itp.

(iii) Zakładamy, że każdy z graczy kieruje się własnym interesem i jest świadomy, że pozostali rozumują tak samo. Brak porozumienia między graczami - **gra niekooperacyjna**.

(iv) **Anonimowość** - nie ma znaczenia kto wybrał daną strategię tylko ilu graczy wybrało daną strategię.

Problemy ekonomiczne i społeczne prowadzące do dużych gier:

(i) **Problem głosowania:**
  - ”Po co mam głosować na (...) gdy i tak wygra kandydat (...)”

(ii) **Zamieszki i protesty społeczne:**
  - ”A co to da że będę się wychylać, jeszcze mnie zwolnią z pracy”

(iii) **Zanieczyszczenie środowiska:**
  - ”Inne państwa i regiony emitują więcej toksyn niż my”

(iv) **Korupcja**
  - ”Wszyscy i tak biorą łapówki, więc dlaczego ja mam nie brać?”

(v) **Ustalanie ilości produkcji:**
  - ”Po co mam zmniejszać produkcję dobra X jak i tak nie zmieni to jego ceny.”

Duże gry w literaturze:

- Schmeidler (1973), gry nieanonimowe
- Mas-Colell (1984), gry anonimowe
- gry ze zróżnicowaną informacją: Harsanyi (1967), Kim and Yannelis (1997), Balder and Rustichini (1994),
- Duże gry supermodularne: Yang and Qi (2014), Balbus, Dziewulski, Reffett and Woźny (2014),

Model matematyczny:

- Λ przestrzeń graczy (np. przestrzeń imion Schmeidler (1973), lub zbioru preferencji graczy Mas -Colell (1984), ilość pieniędzy np. Balbus i Strub (2014)), przestrzeń zwarta (niekoniecznie metryczna)
- $\mathcal{L}$ podzbiory Borelowskie $\mathcal{L} \subset P(\Lambda)$
- λ nieatomowa miara probabilistyczna na $\mathcal{L}$

Opis gry

- Λ zbiór graczy lub ich możliwych cech,
- A zbiór możliwych strategii
- $\mathcal{D}$ zbiór rozkładów prawdopodobieństwa na $\Lambda \times A$, profilowi akcji odpowiada $\tau \in \mathcal{D}$,
- wypłata dla gracza α to $r(\alpha, a, \tau)$ $\alpha \in \Lambda$, $a \in A$ oraz $\tau \in \mathcal{D}$.

Funkcja najlepszych odpowiedzi:

$$BR(\alpha, \tau) = \arg\max_{a \in A} r(\alpha, a, \tau),$$

co daje zbiór rozkładów

$$B(\tau) = \{\tau' \in \mathcal{D} : \tau'(\{(\alpha, a) : a \in BR(\alpha, \tau)\}) = 1\}.$$

Definicja (Mas-Colell (1984))

Dystrybucyjna równowaga *to rozkład* $\tau^* \in \mathcal{D}$ *taki, że* $\tau^* \in B(\tau^*)$*. Czyli:*

$$\tau^*(\{(\alpha, a) : r(\alpha, a, \tau^*) \geq r(\alpha, a', \tau^*), a' \in A\}) = 1$$

Gdy dodatkowo na akcjach A wprowadzimy porządek wtedy możemy zdefiniować:

$$\overline{BR}(\alpha, \tau) := \max BR(\alpha, \tau),$$

$$\underline{BR}(\alpha, \tau) := \min BR(\alpha, \tau).$$

oraz

$$\overline{B}(\tau) = \{\tau' : \tau'((\alpha, a) : a = \overline{BR}(\alpha, \tau)) = 1\},$$

$$\underline{B}(\tau) = \{\tau' : \tau'((\alpha, a) : a = \underline{BR}(\alpha, \tau)) = 1\}.$$

Dodatkowo na rozkładach wprowadzamy porządek stochastyczny. W celu zagwarantowania monotoniczności operatora $\underline{B}$ i $\overline{B}$ zakładamy, że gra jest **supermodularna**.

Gry supermodularne:

- Milgrom and Roberts (1990), Vives (1990)
- Gry z niepełną informacją: Athey (2001) and (2002), Reny (2010), Vives and Van Zandt (2007), Van Zandt (2010).

Twierdzenie (Balbus, Dziewulski, Reffett i Woźny (2014))

Każda duża gra z komplementarnościami posiada równowagę dystrybucyjną. Ponadto ma największą $\overline{\tau}$ i najmniejszą równowagę $\underline{\tau}$, dla których

$$\overline{\tau} = \lim_{n\to\infty} \overline{B}^n(\overline{a}),$$

oraz

$$\underline{\tau} = \lim_{n\to\infty} \underline{B}^n(\underline{a}).$$

gdzie $\overline{a}$ oraz $\underline{a}$ to rozkłady odpowiadające największej i odpowiednio najmniejszej selekcji z A dla wszystkich graczy.